

Simulación estocástica de esquemas piramidales tipo Ponzi



Lilia Quituisaca-Samaniego[†], Juan Mayorga-Zambrano[‡] y Paúl Medina[§]

[†] lilia.quituisaca.samaniego@gmail.com / [‡] jmayorgaz@gmail.com /
[§] pmedinavz@gmail.com

[†]Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC)

[‡]Pontificia Universidad Católica del Ecuador Sede Ambato (PUCESA)

[§]Universidad de las Fuerzas Armadas (ESPE)

Introducción

- La presencia de pirámides financieras, en nuestro entorno, ha sido el motivo para estudiar y desarrollar “Un modelo matemático para esquemas piramidales tipo Ponzi” [10].
- Los esquemas Ponzi (PZ) son contextualizados como *pirámides cerradas* (con un retorno máximo del 300%) en tanto que a los esquemas piramidales no-Ponzi se les denomina *pirámides abiertas* o *células de abundancia*.
- La crisis financiera internacional hace referencia a la aparición o incremento de pirámides financieras en diferentes países, se tiene conocimiento de famosas y conocidas estafas en España, Estados Unidos, Ucrania, Rumania, Albania, Colombia, etc.

- La ilegalidad de las actividades de Madoff es muy relevante, su fraude estuvo activo más de dos décadas; se proporcionaban beneficios anuales de entre el 8% y el 12% por la inversión, lo que generó estabilidad y confianza.
- Este tipo de estafa ha desencadenado crisis económicas, financieras y sociales que han evidenciado entre otras cosas: inusuales niveles de inversión, retorno fuera de los niveles de mercado, lavado de dinero, etc.
- De todo lo mencionado, Ecuador no ha sido la excepción, de hecho en el año 2005 se conoció en el país el caso Cabrera, el cual ha quedado memorizado en la sociedad ecuatoriana.

Marco teórico

Este trabajo está motivado por las investigaciones de Mayorga-Zambrano, [10], y Artzrouni, [2], que son pioneros en el estudio de esquemas PZ desde un punto de vista matemático.

- 1 **Artzrouni** plantea un modelo determinístico.
- 2 **Mayorga-Zambrano** desarrolla un modelo estocástico.

Artzrouni - modelo determinístico, donde la evolución del capital real, $L(t)$, es continuo en el tiempo t

$$L(t + dt) = L(t) (1 + \eta dt) + p(t)dt - W(t)dt. \quad (1)$$

Mayorga-Zambrano - modelo estocástico, donde la estructura de (1) es análoga a la sucesión de recurrencia (el capital real en un instante k posterior)

$$L_k = (1 + \eta_{k-1})L_{k-1} + P_{k,k} - W_k$$

- 1 La expansión por inversiones legítimas del capital real al instante previo: η (respectivamente η_{k-1}) representan la correspondiente tasa nominal.
- 2 El ingreso de dinero fresco, $p(t)dt$ (respectivamente $P_{k,k}$), producto de las captaciones a clientes nuevos.
- 3 La filtración de dinero producto de retiros que hacen los clientes, $W(t)dt$ (respectivamente W_k).

Se describe un comportamiento cuasi-exponencial de un esquema PZ:

$$\begin{cases} C_k - C_{k-1} = \bar{N}_k \cdot C_{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \\ C_0 = c_0, \end{cases}$$

donde C_k es el número de clientes en el instante de transacciones t_k . Además, es posible hacer un seguimiento de otras variables de interés, como: el robo pecuniario y el monto legal del fraude, el punto crítico de PZ (definido en términos del estado financiero de la captadora) y el punto de saturación de PZ (definido en términos del capital real de la captadora).

Modelo

Para modelar la evolución de los valores esperados \bar{N}_k , nos apoyamos en un modelo SIR¹ sencillo:

$$\bar{N}_k = \frac{\bar{C}_k}{\bar{C}_{k-1}} - 1, \quad (2)$$

$$\bar{C}_k = \mathcal{I}(t_k) \cdot \mathcal{U}, \quad (3)$$

con

$$\begin{cases} \dot{S} = -a S(t) \mathcal{I}(t), \\ \dot{\mathcal{I}} = a S(t) \mathcal{I}(t) - b \mathcal{I}(t), \\ S(0) = 1 - \frac{1}{\mathcal{U}}, \\ \mathcal{I}(0) = \frac{1}{\mathcal{U}}, \end{cases} \quad (4)$$

donde S representa la fracción de la PEA susceptible de ser estafado e \mathcal{I} denota la fracción de la PEA que ya está estafada.

¹Susceptibles (a ser estafados), Infectados (estafados) y Recuperados

El valor esperado de la tasa de retiros en t_k de los clientes que ingresaron a PZ al tiempo t_j depende de $d = k - j$, el tiempo de permanencia en el sistema:

$$\bar{\omega}_{k,j} = \begin{cases} (k-j)[\alpha(k-j) + \beta], & \text{si } k-j \leq d_1, \\ \omega^*, & \text{si } k-j > d_1, \end{cases} \quad (5)$$

con

$$\alpha = \frac{d_1\omega_* - d_0\omega^*}{d_1d_0^2 - d_0d_1^2}, \quad \beta = \frac{d_0^2\omega^* - d_1\omega_*}{d_1d_0^2 - d_0d_1^2},$$

$$\omega^* = \frac{i_p}{i_p + 1},$$

donde los coeficientes α y β están determinados por los puntos (d_0, ω_*) y (d_1, ω^*) que corresponden a los valores esperados de la primera instancia en que el retiro se vuelve significativo y de la primera instancia en que se retira toda la ganancia, respectivamente.

El *punto crítico* T_c de PZ es el tiempo que su estado financiero cambia por primera vez de signo:

(C1) $F(T_c) = 0$;

(C2) $F(t) > 0$, para todo $t \in (0, T_c)$;

(C3) Si T_0 verifica C1) y C2), entonces $T_c \leq T_0$.

Por otro lado, el *punto de saturación* T_s de PZ es el instante en que su capital real total cambia por primera vez de signo, es decir:

(S1) $L(T_s) = 0$;

(S2) $L(t) > 0$, para todo $t \in [0, T)$;

(S3) Si T_0 verifica S1) y S2), entonces $T_s \leq T_0$.

Los puntos crítico y de saturación son variables aleatorias cuyas distribuciones de probabilidad dependen de parámetros del sistema.

Charles Ponzi, fundó en 1919 la empresa denominada Securities Exchange Col, en Boston. Más de 10 mil norteamericanos invirtieron en su negocio, ofrecía un retorno de inversión del 100% trimestral [3], mientras que la Reserva Federal subió las tasa de interés de 4,75% en noviembre de 1919, a 6% en enero de 1920 y finalmente a 7% en junio [7]. En tan sólo siete meses, habría acumulado alrededor de 10 millones de dólares [3] o un monto de estafa aproximado de 14,5 millones de dólares [9].

En 1920 la empresa de Ponzi es investigada, la pirámide deja de funcionar por la auditoría y por la orden de cierre que emitieron las autoridades [9], cabe recalcar que mediante el software de simulación, la pirámide no alcanza el punto crítico al momento de cierre de sus operaciones.

Escenario de simulación:

Consideramos el caso de Ponzi tomando en cuenta la PEA de 1920 para Estados Unidos (82'739315) [12], con los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor
E_0	10'000000
ω	10%
i_p	100%
h	3
m	100
c_0	1000
η	4.75%

Parámetros de simulación - Caso Ponzi - PEA EE.UU.

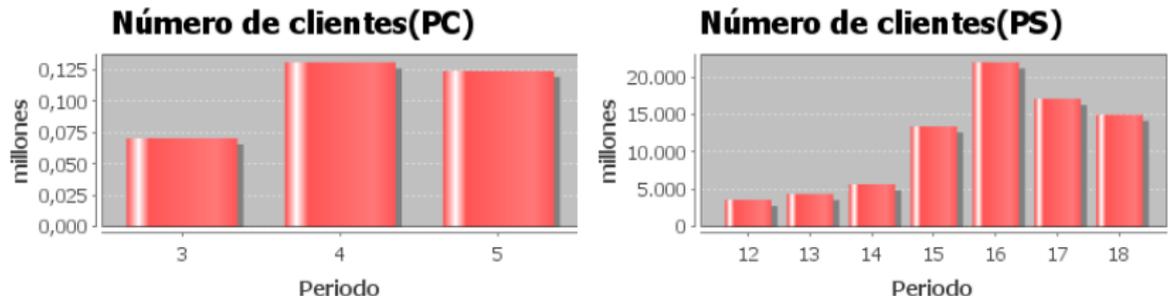


Figura: Número de clientes - Caso Ponzi - PEA EE.UU. a) punto crítico b) punto de saturación

El número de clientes crece de forma acelerada, al llegar al punto crítico el número de clientes se ha incrementado en un 330%, lo que representaría el 0,15% de la PEA [6] de Estados Unidos, el 3,31% de la PEA del estado de Masachusset y el 17,04% de la población de la ciudad de Bonton, correspondiente al año de 1920.

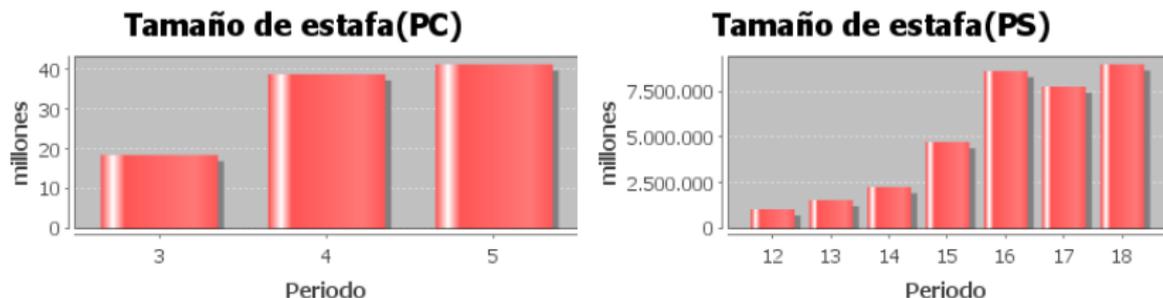
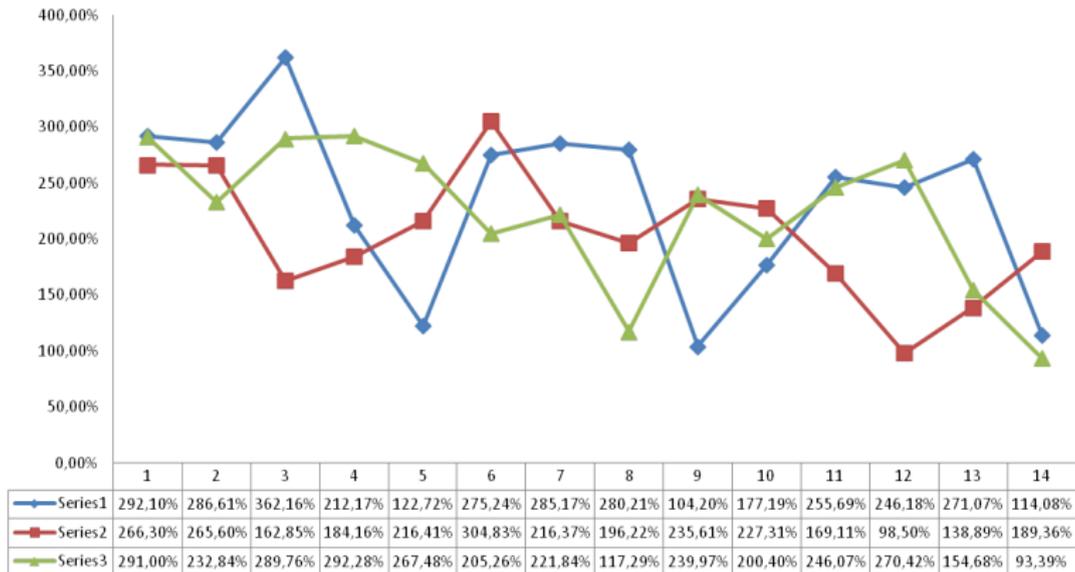


Figura: Tamaño de estafa - Caso Ponzi - PEA EE.UU. a) punto crítico b) punto de saturación

El incremento porcentual de la expansión de capital entre el punto crítico y el punto de saturación sobrepasa el 63%. El tamaño de la estafa sufre un incremento porcentual de 157% al llegar al punto de saturación y de éste apenas el 3,5% ha sido retirado por los inversores al llegar al PC y en el PS retiran un 4,7%.



Proceso de incremento porcentual del número de clientes (Ej. corridas aleatorias)

Figura: Variación porcentual del número de clientes - Caso Ponzi - PEA EE.UU.

Validación del algoritmo

Para comprobar la validez de los resultados obtenidos, compararemos éstos con el algoritmo propuesto por DeWitt [5], el cual se fundamenta en que el número de clientes estafados sigue una función exponencial

$$y = 1000(2^n),$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, y por tanto el resto de variables asociadas cambiará conforme evoluciona el periodo y número de clientes incorporados a la estafa.

Payout Rounds	Number of Participants
Round 1	1.000
Round 2	2.000
Round 3	4.000
Round 4	8.000
Round 5	16.000
Round 6	32.000
Round 7	64.000
...	...
Round 13	4.096.000
Round 14	8.192.000
Round 15	16.384.000
Round 16	32.768.000
Round 17	65.536.000
Round 18	131.072.000
Round 19	262.144.000
Round 20	524.288.000

Ponzi Progression Starting with 1.000 "Investors".

Fuente: Social Security Administration [5].

El número de clientes de Ponzi a los siete meses difiere hasta en un 85% con respecto a la simulación ejecutada y es superior hasta en un 53% con respecto al proceso que realiza DeWitt [5].

Periodos comparativos		Número de clientes		
		Simulación	DeWitt	Datos investigados
0 años, 6 mes/es	APC PC	8551	4000	S/D
0 años, 9 mes/es		38594	8000	
1 año, 0 mes/es		127464	16000	
7 meses		S/D		Superior a 10 mil

Número de clientes - datos comparativos - caso Ponzi.

Número de clientes - caso Ponzi

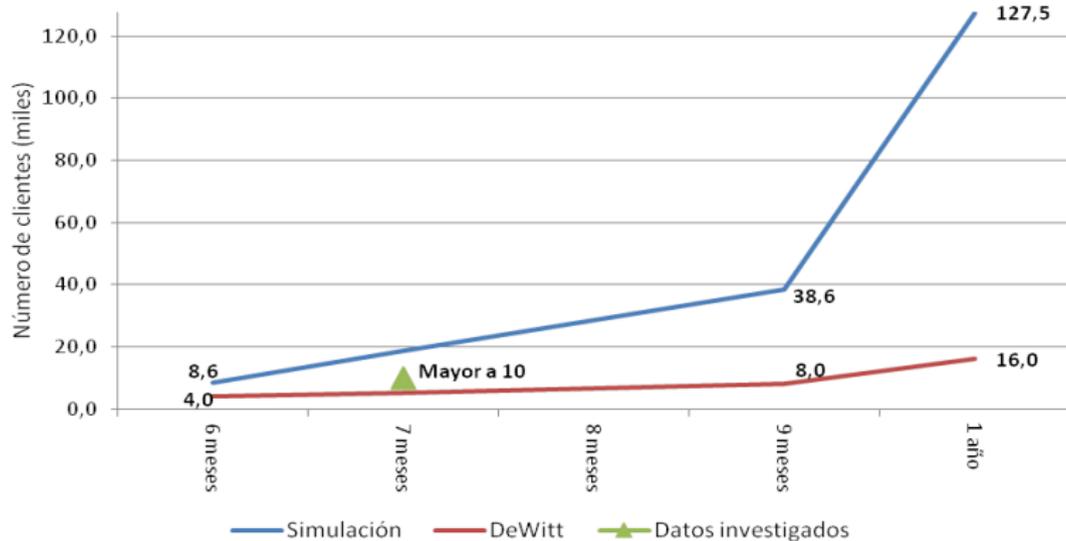


Figura: Número de clientes - serie comparativa - caso Ponzi.

Se observa que el monto de estafa de Ponzi a los siete meses es superior al 50% respecto a la simulación ejecutada y al proceso que realiza DeWitt [5].

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)		
		Simulación	DeWitt	Datos investigados
0 años, 6 mes/es	APC	4,38	4,00	S/D
0 años, 9 mes/es		10,97	8,00	
1 año, 0 mes/es		PC	37,14	
7 meses		S/D		Superior a \$10

Tamaño de estafa - datos comparativos - caso Ponzi.

Tamaño de estafa - caso Ponzi

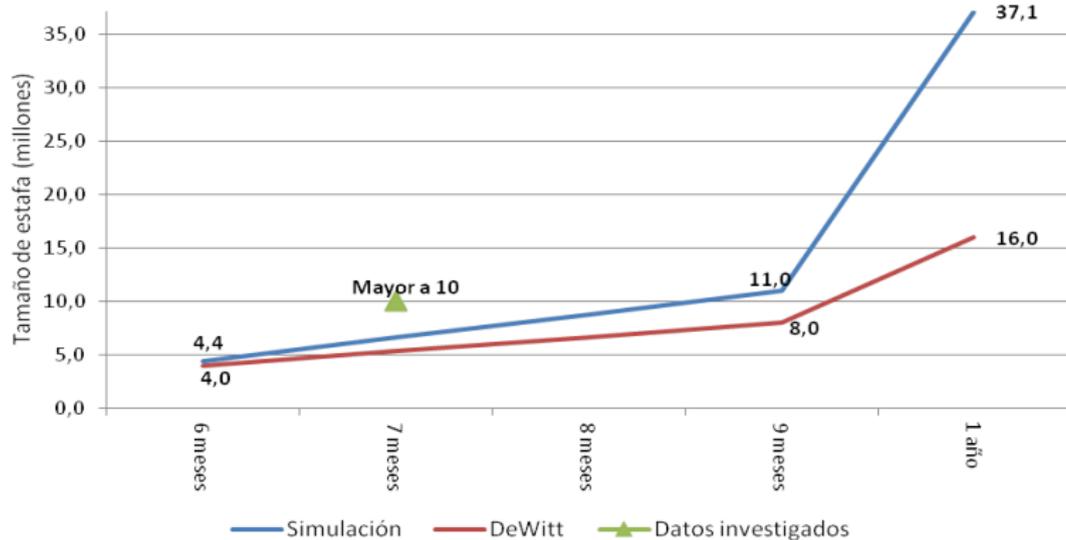


Figura: Tamaño de estafa - serie comparativa - caso Ponzi.

Mientras mayor sea el número de simulaciones, mayor será la convergencia hacia el valor verdadero de cada uno de los resultados.

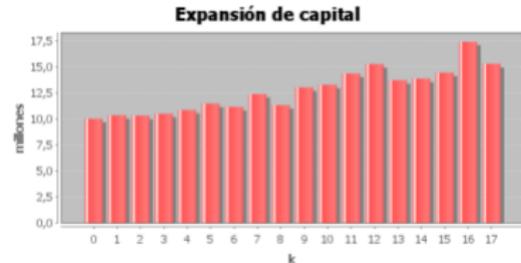


Figura: A) Supera las 20000 simulaciones B) Hasta 10000 simulaciones

Se modifica los valores de los parámetros de ingreso, para analizar los resultados debido al cambio:

1 Parámetro cambiante: Capital inicial

El capital inicial es directamente proporcional al tiempo en que se establece el Punto Crítico, al igual que la expansión de capital. Por otra parte, se mantiene prácticamente invariante el tiempo en el cual se alcanza el Punto de Saturación.

2 Parámetro cambiante: Tasa de retorno

Si la tasa de retorno se incrementa se disminuye el tiempo en que se establece el Punto Crítico al igual que el número clientes y el tamaño estafa. Mientras se mantiene el tiempo del Punto de Saturación al igual que la expansión de capital.

1 **Parámetro cambiante: Período básico de inversión (número de meses)**

Si se aumenta el número de meses en que se haría efectivo el pago de la tasa de retorno se incrementa el tiempo en que se establece el Punto Crítico y el Punto de Saturación.

2 **Parámetro cambiante: monto de inversión inicial**

Si el monto de inversión se incrementa hasta llegar al valor del capital inicial el tiempo en que se establece el Punto Crítico es menor. Se puede observar que se incrementa la expansión de capital, se incrementa el tamaño de la estafa al igual que el monto de retiro. El tiempo en que se establece el Punto de Saturación se mantiene.

Resultados

El notario José Cabrera entregaba intereses mensuales del 7% al 10% a miles de clientes de distintos lugares del Ecuador, especialmente de las provincias de Azuay, Guayas, Loja, Manabí y Pichincha en una de las estafas más grandes ocurridas en el país. Se presume que el monto de estafa superaría los \$700 millones con más de 35 mil personas afectadas. El monto de inversión inicial de algunos clientes sobrepasaba los \$30.000, según un listado encontrado en sus archivos personales. La lista de personas que conformaban la pirámide comprometía a varios jueces, políticos, banqueros, policías y militares [1].

Escenario de simulación:

Consideramos el caso particular de Cabrera, con los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor
E_0	10'000000
ω	10%
i_p	7%
h	1
m	500
c_0	1
η	2.5%

Parámetros de simulación - Cabrera

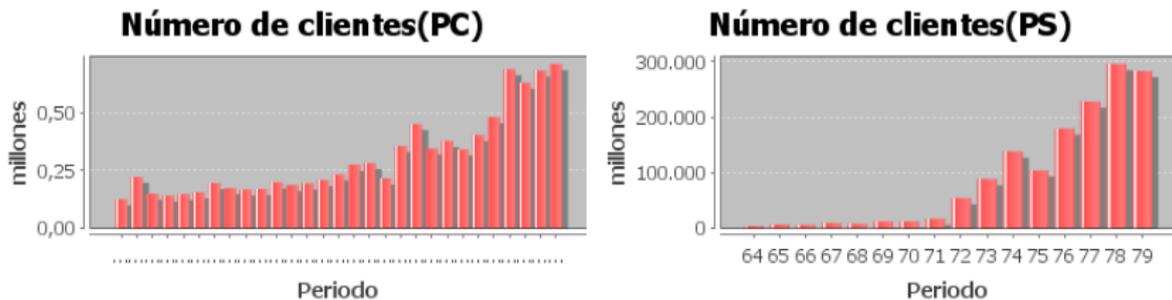


Figura: Número de Clientes - Caso Cabrera a) punto crítico b) punto de saturación

El número de clientes antes del punto crítico es aproximadamente la PEA de la provincia de Los Ríos o de la provincia del Azuay. Cuando llega al punto crítico el número de clientes es equivalente al 13% de la PEA de la region Sierra. Para el punto de saturación se ha sobrepasado el total de habitantes de Ecuador.

Distribución de la PEA (1990-2006)

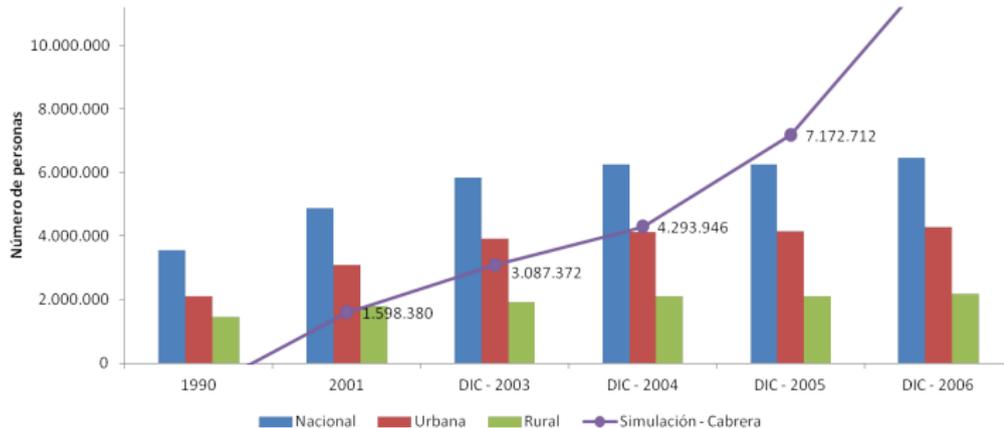


Figura: Distribución de la PEA (1995-2006). Fuente: Censos de Población y Vivienda 1990, 2001; Encuesta Nacional de Empleo y Subempleo 2003, 2004, 2005, 2006 [8].
Fuente: Elaboración propia

Haciendo una comparación con los datos obtenidos a través de la simulación del caso Cabrera y los datos de la Población Económicamente Activa nacional, urbana y rural registrada desde el año 1990, tenemos que:

Para el año 2001 el número de clientes, según la simulación del caso Cabrera no sobrepasa la PEA rural. En los posteriores años es superior con un 38% para el año 2003, 51% para el año 2004, 71% para el año 2005.

Lo mismo sucede con la PEA urbana, en el año 2004 el número de clientes es superior en un 4% y para el 2005 es superior en un 42%. Además se puede conocer que al llegar a diciembre 2005 el número de clientes sobrepasaría la PEA nacional en un 13%.

Para el caso Cabrera podemos observar que el número de clientes sobrepasa la cifra estimada en un 800% al llegar al punto crítico, para los siguientes meses se sobrepasa a la población mundial.

Periodos comparativos		Número de clientes	
		Simulación (miles)	Datos investigados
3 años, 8 mes/es	APC	186,557	S/D
3 años, 9 mes/es	PC	383,935	
10 años, 5 mes/es	APS	29469862,391	
10 años, 6 mes/es	PS	43523114,391	
Mayor a 9 años		S/D	Superior a 35 mil

Número de clientes - datos comparativos - Caso Cabrera.

En el punto crítico, el notario Cabrera debe haber tenido aproximadamente el 20% del tamaño de estafa estimado [1], según la simulación realizada.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)	
		Simulación	Datos investigados
3 años, 8 mes/es	APC	103,15	S/D
3 años, 9 mes/es	PC	212,01	
10 años, 5 mes/es	APS	15'973.876,75	
10 años, 6 mes/es	PS	23'627.714,46	
Mayor a 9 años		S/D	Superior a \$700

Tamaño de estafa en millones - datos comparativos - Caso Cabrera.

El comerciante Carlos Alfredo Suarez, por medio de Proyecciones D.R.F.E. entregaba 70% de interés mensual y en los tres últimos meses de duración de la pirámide subieron a 150% mensual. Las ciudades de mayor captación fueron Pasto, Cali, Popayán, Santander de Quilichao, entre otras con aproximadamente 6 millones de afectados. El monto mínimo de inversión era 2 millones de pesos. Se presume que el monto de estafa fue de 2 billones de pesos [11]. Como dato adicional debemos mencionar que las tasas de interés para el año 2008 del Banco Central de Colombia era de 9,5% [4].

Escenario de simulación:

Consideramos el caso particular de Proyecciones D.R.F.E., con los siguientes parámetros (hemos simplificado cifras para la simulación):

Parámetro	Valor
E_0	500000
ω	10%
i_p	70%
h	1
m	2
c_0	1
η	9.5%

Parámetros de simulación - Proyecciones D.R.F.E.

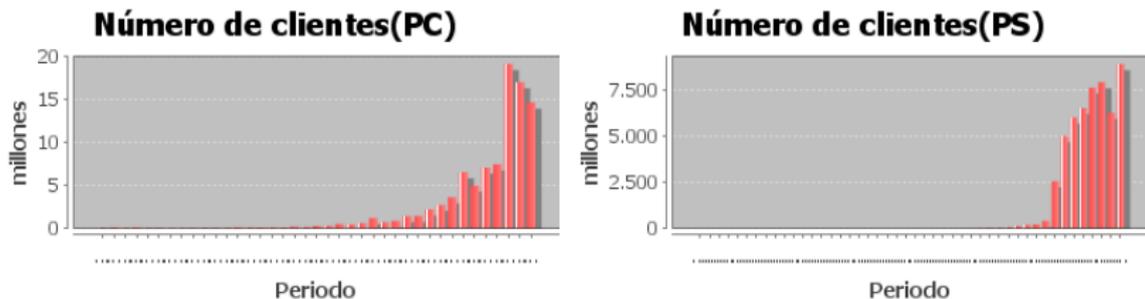


Figura: Número de Clientes - D.R.F.E. a) punto crítico b) punto de saturación

En el punto crítico existe un incremento del 40% en comparación al período anterior. El crecimiento de clientes en el punto de saturación sobrepasa la PEA de Colombia (promedio entre los años 2005-2008, según datos obtenidos en [6]) en un 147%.

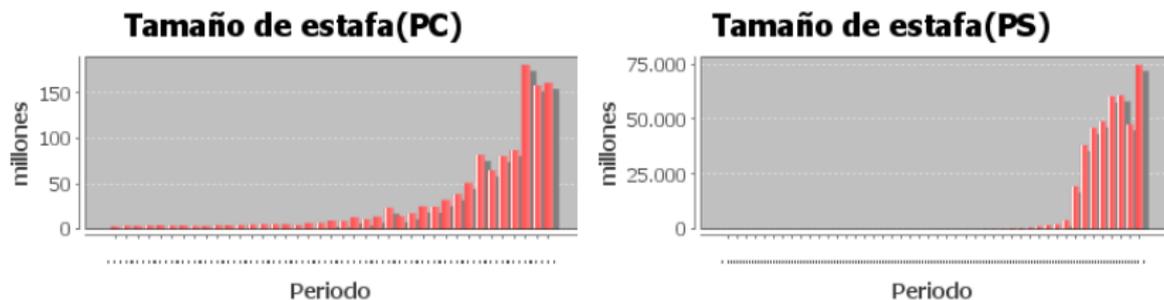


Figura: Tamaño de estafa - D.R.F.E. a) punto crítico b) punto de saturación

El porcentaje de variación de la expansión de capital entre el PC y el PS es del 44%. El tamaño de la estafa se incrementa de forma exagerada durante el proceso, en contraste a estos valores están los retiros. Podemos observar que el porcentaje de retiro es de aproximadamente el 20% en el PC y de apenas el 9% en el PS con respecto al tamaño de la estafa.

Datos comparativos

El número de clientes en el punto crítico esta por debajo del 7% del número de inversionistas investigados(mínimo 6 millones), mientras que para el punto de saturación el número de inversionistas simulados sobrepasa esta cifra en un 480%.

Periodos comparativos		Número de clientes	
		Simulación (miles)	Datos investigados
3 años, 6 mes/es	APC	306,53	S/D
3 años, 7 mes/es	PC	430,14	
3 años, 10 mes/es	APS	15626,73	
3 años, 11 mes/es	PS	29225,68	
Mayor a 3 años		S/D	Superior a 6 millones

Número de clientes - datos comparativos - Proyecciones D.R.F.E.

Podemos observar que antes de llegar al punto crítico (3 años, 6 meses) se ha superado en un 300% al monto de estafa investigado.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa	
		Simulación (millones)	Datos investigados
3 años, 6 mes/es	APC	7,4	S/D
3 años, 7 mes/es	PC	9,49	
3 años, 10 mes/es	APS	138,07	
3 años, 11 mes/es	PS	243,91	
Mayor a 3 años		S/D	Superior a 2 millones ²

Tamaño de estafa en millones - datos comparativos - Proyecciones D.R.F.E.

²Debemos tomar en cuenta que en los parámetros de simulación se simplificaron (dato investigado 2 billones de pesos).

Bernard Madoff Investments Securities (B L M I S) fundada en 1960 por Madoff, maquinó una de las estafas más grandes por el tiempo de duración, tamaño de estafa, número de clientes afectados alrededor del mundo. En su pirámide existieron grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, entre otros, quienes recibían intereses anuales entre el 8% al 12% por la inversión, lo que generó estabilidad y confianza.

El tamaño de estafa estaría alrededor de 65.000 millones de dólares. El Grupo Santander colocó unos 2.320 millones de euros, de los cuales 2.010 millones correspondían a la banca privada internacional de América Latina[13].

Escenario de simulación:

Consideramos el caso de Madoff, con los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor
E_0	5'000000
ω	10%
i_p	8%
h	12
m	100
c_0	1
η	4.6%

Parámetros de simulación - Caso Madoff

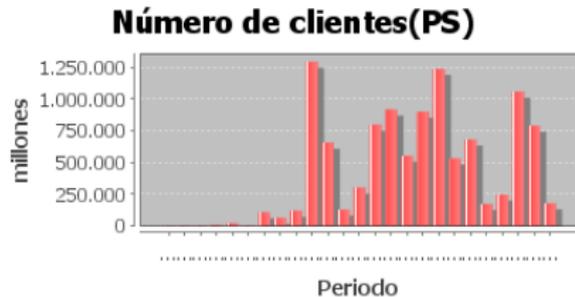
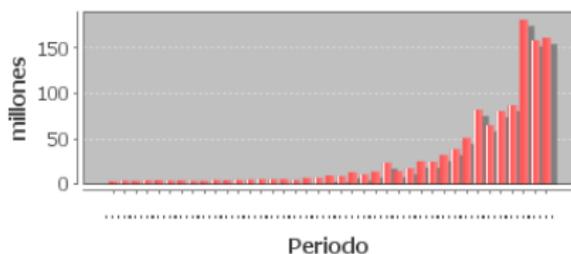


Figura: Número de Clientes - Madoff. a) punto crítico b) punto de saturación

El número de clientes crece de forma acelerada, siendo superior al 300% al llegar al punto crítico lo que representaría el 20% del promedio de la PEA [6] entre los años 1998-2008 de Estados Unidos. Para el punto de saturación se hace imposible una comparación puesto que se ha sobrepasado el total de la población mundial.

Tamaño de estafa(PC)



Tamaño de estafa(PS)

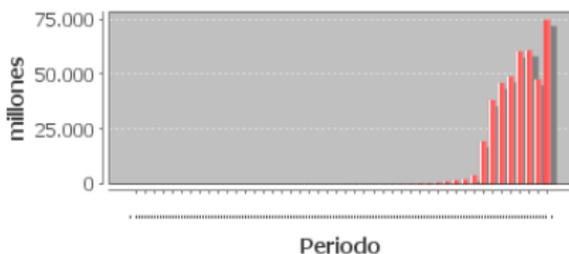


Figura: Tamaño de estafa - Madoff. a) punto crítico b) punto de saturación

El porcentaje de variación de la expansión de capital entre el PC y el PS sobrepasa el 70%. El tamaño de la estafa se incrementa de forma exagerada durante el proceso con el 220% en el punto crítico y del 172% en el PS. Podemos observar que el porcentaje de retiro es menor al 1% con respecto al tamaño de la estafa en los últimos años de vida de la pirámide.

Datos comparativos

En este caso fueron afectados miles de inversionistas (grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, etc) de algunos continentes, desconociéndose la cifra aproximada de clientes afectados. Cuando la pirámide llega a los 25 años ha sobrepasado la población mundial.

Periodos comparativos		Número de clientes (miles)	
		Simulación	Datos investigados
13 años, 0 mes/es	APC	544,02	S/D
14 años, 0 mes/es	PC	1756,33	
25 años, 0 mes/es	APS	86880042,97	
26 años, 0 mes/es	PS	235914711,84	
Mayor a 20 años		S/D	Incalculable

Número de clientes - datos comparativos - Caso Madoff.

Podemos observar que en el punto crítico el tamaño de la estafa es apenas el 0,30% del monto de estafa investigado, al comparar con el tamaño de estafa a los 25 años el resultado de la simulación supera el mil por ciento.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)	
		Simulación	Datos investigados
13 años, 0 mes/es	APC	60,72	S/D
14 años, 0 mes/es	PC	194,54	
25 años, 0 mes/es	APS	9657820,25	
26 años, 0 mes/es	PS	26244336,14	
Mayor a 20 años		S/D	Superior a \$65000

Tamaño de estafa - datos comparativos - Caso Madoff.

En la siguiente tabla se resume el porcentaje de retiro con respecto al tamaño de la estafa. Para el caso Ponzi el porcentaje de retiro crece, mientras que en los demás decrece a medida que la pirámide financiera incrementa el número de inversores.

Casos	Puntos de estudio			
	APC	PC	APS	PS
Cabrera	5,86%	5,49%	2,14%	2,09%
DRFE	23,40%	22,25%	9,67%	8,93%
Madoff	1,24%	0,94%	0,98%	0,99%
Ponzi PEA Masachusset	6,36%	4,78%	13,35%	15,75%
Ponzi PEA USA	3,30%	3,47%	4,64%	4,86%

Porcentaje de retiro con respecto al tamaño de la estafa - Casos de estudio.

Conclusiones

- La empresa captadora de dinero no depende necesariamente de un capital inicial fuerte, puesto que el pago de intereses de la inversión de los clientes es pagada por los nuevos clientes que ingresan a la pirámide. Por tanto, la empresa puede disponer del monto inicial de inversión mas la tasa de retorno ofrecida a los primeros clientes.
- Mientras la tasa de retorno se incrementa, el tiempo que dura la pirámide es menor, de igual forma depende del lapso en que los valores son cancelados a los clientes.
- El monto de retiro es mínimo con respecto al tamaño de la estafa.

Referencias

-  A. ANGULO, D. ARAUJO, U. , E. CARVAJAL, M. CEDEÑO, G. COLA, P. CORONEL, B. MOYANO, AND J. TIBANLOMBO, *La ruleta rusa*, EDIMPRES S.A., Quito, Ecuador, 2005.
-  M. ARTZROUNI, *The mathematics of Ponzi schemes*, Mathematical Social Sciences, (2009), pp. 190–201.
-  M. ARTZROUNI, *The mathematics of ponzi schemes*, Mathematical Social Sciences, 58 (2009), pp. 190–201.
-  BANCO DE LA REPÚBLICA, *Indicador bancario de referencia*. Disponible en: <http://www.banrep.gov.co/series-estadisticas/Contingencia/IBR/Plazoovernight.xls>.

Consultado en Agosto 20, 2012.

-  DEWITT, LARRY, *Ponzischemes vs. social security*.
Disponible en: <http://www.ssa.gov/history/ponzi.htm>.
Consultado en Noviembre 4, 2012.
-  EL BANCO MUNDIAL, *Población activa, total*.
Disponible en: <http://datos.bancomundial.org/indicador>.
Consultado en Septiembre 9, 2012.
-  M. FRIEDMAN AND A. J. SCHWARTZ, *A Monetary History of the United States, 1867-1960*, no. frie63-1 in NBER Books, National Bureau of Economic Research, Inc, Jan-Jun 1963.
-  INEC, *Pobreza y desigualdad*, Resultados de la Encuesta de Condiciones de Vida - Quinta Ronda, (2006).
-  T. KITCHENS, *Cash flow analysis method: following the paper trail in ponzi schemes*, FBI Law Enforcement Bulletin, 62 (1993), pp. 10–13.



J. MAYORGA-ZAMBRANO, *Un modelo matemático para esquemas piramidales tipo ponzi*, Analítika, 1 (2011), pp. 119–129.



M. PAREDES, *Las pirámides financieras: Colombia*, Estudios y Análisis Técnicos - Estudios Macrofinancieros, Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador, (2009).



UNITED STATES CENSUS BUREAU, *Fourteenth census of the united states*.

Disponible en:

<http://www2.census.gov/prod2/decennial/documents/41084484v1ch>

Consultado en Noviembre 24, 2012.



A. WEITMANN, *El caso Madoff: Los secretos de la estafa del siglo*, LA ESFERA DE LOS LIBROS, Madrid, España, 2009.