Institución Universitaria

Modelo actuarial para la estimación de la tasa de interés técnico mediante un derivado financiero sobre rentas vitalicias

G.A. Agudelo Torres

Instituto Tecnológico Metropolitano – ITM. Departamento de Finanzas. Medellín, Colombia

e-mail: albertoagudelo@itm.edu.co

L.C. Franco Arbeláez

Instituto Tecnológico Metropolitano – ITM. Departamento de Finanzas. Medellín, Colombia

e-mail: luisfranco@itm.edu.co

L.E. Franco Ceballos

Instituto Tecnológico Metropolitano – ITM. Departamento de Finanzas. Medellín, Colombia

e-mail: luisefranco@itm.edu.co

Institución Universitaria

Resumen

En la ciencia actuarial relativa a sistemas pensionales se asume que la tasa a la cual se calculan las reservas para cubrir el pago de las rentas vitalicias, es igual a la tasa de retorno esperada de los portafolios en los cuales están invertidas. Esa situación podría llevar a los administradores de los recursos a tomar un exceso de riesgo con el fin de tener mayor rentabilidad y a la vez disminuir sus pasivos pensionales (Merton, 2012). En este artículo se demuestra que dichas tasas no son necesariamente iguales. Para determinar la tasa de interés adecuada para el cálculo de las rentas vitalicias, se presenta un derivado financiero cuyo activo subyacente es una renta vitalicia. Dicho derivado es modelado mediante procesos estocásticos, incluyendo las fluctuaciones de la tasa de interés que afectan tanto la valoración del portafolio, como el monto de la reserva necesaria para soportar actuarialmente el pago de la renta vitalicia. Determinar la tasa de descuento adecuada al calcular reservas actuariales contribuye a fortalecer la estabilidad de los sistemas pensionales y del sistema financiero en general.

Función de Sobrevivencia y Probabilidad de Vivir

Sea $S(\pi)$ una función de sobrevivencia que indica la probabilidad de que la edad de muerte (Π) de una persona en particular sea mayor a una edad π.

$$S(\pi) = P(\Pi > \pi)$$

Se define ${}_tp_\phi$ como la probabilidad que tiene una persona de edad ϕ de no fallecer en los próximos t años

$${}_tp_\phi = \frac{S(\phi + t)}{S(\phi)}$$

Cálculo de Reservas Actuariales Necesarias

$$R_N = E(Pago_0)e^{-i*0} + E(Pago_1)e^{-i*1} + \cdots + E\left(Pago_{w-\phi}\right)e^{-i*(w-\phi)}$$

$$R_N = \left(xe^{\rho*0}\ {}_0p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*0} + \left(xe^{\rho*1}\ {}_1p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*1} + \cdots + \left(xe^{\rho*(w-\phi)}\ {}_{w-\phi}p_\phi + 0_{w-\phi}q_\phi\right)e^{-i*(w-\phi)}$$

Donde:

x: Monto de la mesada en un instante t

i: Tasa de interés nominal

ρ: Porcentaje de incremento del nivel general de precios

ϕ: Edad actual del asegurado

$w-\phi$: Tiempo máximo que el asegurado puede vivir

Cálculo de Reservas Actuariales Necesarias

Como $e^{it} = e^{\rho t} * e^{rt}$, con r siendo la tasa de interés real, entonces

$$R_N = \left(xe^{\rho*0}\ {}_0p_\phi\right)e^{-\rho*0} * e^{-r*0} + \left(xe^{\rho*1}\ {}_1p_\phi\right)e^{-\rho*1} * e^{-r*1} + \cdots + \left(xe^{\rho*(w-\phi)}\ {}_{w-\phi}p_\phi\right)e^{-\rho*(w-\phi)} * e^{-r*(w-\phi)}$$

$$R_N = x\ {}_0p_\phi e^{-r*0} + x\ {}_1p_\phi e^{-r*1} + x\ {}_2p_\phi e^{-r*2} + \cdots + x\ {}_{w-\phi}p_\phi e^{-r*(w-\phi)}$$

$$R_{Nt} = x\sum_{t=0}^{w-\phi} {}_tp_\phi e^{-rt}$$

Cálculo de Reservas Actuariales Necesarias

Institución Universitaria

En tiempo continuo puede expresarse de la siguiente forma:

$$R_{Nt} = x \int_0^{w-\phi} {}_t p_\phi e^{-rt} dt$$

$$R_{Nt} = x \int_0^{w-\phi} \frac{S(\phi + t)}{S(\phi)} e^{-rt} dt$$

$$R_{Nt} = \frac{x}{S(\phi)} \int_0^{w-\phi} S(\phi + t) e^{-rt} dt$$

Cambio en la Reserva Actuarial Necesaria

Si la reserva actuarial depende del tiempo y de la tasa de interés real, y ésta sigue un proceso de Vasicek

$$dr_t = [\theta - ar_t]dt + \nu dW_t$$

Entonces el cambio en la reserva está dado por:

$$dR_{Nt} = \left(\frac{\partial R_{Nt}}{\partial r}[\theta - ar_t] + \frac{\partial R_{Nt}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_{Nt}}{\partial r^2}\nu^2\right)dt + \frac{\partial R_{Nt}}{\partial r}\nu dW_t$$

Cambio en la Reserva Actuarial Necesaria

$$dR_{Nt} = \left(-\frac{x}{S(\phi)}[\theta - ar_t]\int_0^{w-\phi} tS(\phi + t)e^{-rt}dt - x\right.$$

Cambio en la Reserva Actuarial Constituida

Supongamos que la reserva constituida cambia de la siguiente forma:

$$dR_{Ct} = \mu_t R_{Ct} dt + \sigma_t R_{Ct} dU_t - x e^{\delta dt}$$

$$Cov(dW_t, dU_t) = \rho dt$$

Utilizando las series de Maclaurin puede demostrarse que $e^{\delta dt} = 1 + \delta dt$, por lo tanto:

$$dR_{Ct} = \mu_t R_{Ct} dt + \sigma_t R_{Ct} dU_t - x - x\delta dt$$

$$dR_{Ct} = (\mu_t R_{Ct} - x\delta) dt + \sigma_t R_{Ct} dU_t - x$$

Condición para tener una renta vitalicia nivelada

Institución Universitaria

Para que el cambio en la reserva constituida sea igual al cambio en la reserva necesaria, se debe encontrar la tasa de interés real r a la cual debe rentar la primera.

$$dR_{Ct} = dR_{Nt}$$

Lo anterior implica que:

$$\mu_t R_{Ct} - x\delta = -\frac{x}{S(\phi)}[\theta - ar_t]\int_0^{w-\phi} tS(\phi + t)e^{-rt}dt - x + \frac{xv^2}{2S(\phi)}\int_0^{w-\phi} t^2 e^{-rt} S(\phi + t)dt$$

$$\sigma_t R_{Ct} dU_t - x = -\frac{xv}{S(\phi)}\left(\int_0^{w-\phi} tS(\phi + t)e^{-rt}dt\right)dW_t$$

Condición para tener una renta vitalicia nivelada

$$\mu_t = -\frac{x}{S(\phi)R_{Ct}}[\theta - ar_t]\int_0^{w-\phi} tS(\phi+t)e^{-rt}dt - \frac{x}{R_{Ct}} + \frac{xv^2}{2S(\phi)R_{Ct}}\int_0^{w-\phi} t^2e^{-rt}S(\phi+t)dt + \frac{x\delta}{R_{Ct}}$$

$$\sigma_t = \frac{x}{R_{Ct}dU_t}\left[1 - \frac{v}{S(\phi)}\left(\int_0^{w-\phi} tS(\phi+t)e^{-rt}dt\right)dW_t\right]$$

El administrador del portafolio debe decidir el nivel de riesgo que desea para la reserva y seleccionar la rentabilidad eficiente para dicho nivel (η).

$$\mu_t = \eta$$

Cálculo de estimadores

Los estimadores de los parámetros de un proceso de Vasicek pueden calcularse a partir de los de un AR(1).

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{r}_t \left(1 - \frac{Cov(r_t, r_{t-1})}{V(r_t)}\right)}{\Delta t} \qquad \hat{a} = \frac{1 - \frac{Cov(r_t, r_{t-1})}{V(r_t)}}{\Delta t}$$

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{V(r_t - \hat{r}_t)}{\Delta t}}$$

Cálculo de la Tasa de Interés Técnico

$$\eta = -\frac{x}{S(\phi)R_{Ct}}\left[\frac{\bar{r}_t\left(1-\frac{Cov(r_t,r_{t-1})}{V(r_t)}\right)}{\Delta t} - \frac{1-\frac{Cov(r_t,r_{t-1})}{V(r_t)}}{\Delta t} r_t\right]\int_0^{w-\phi} tS(\phi+t)e^{-rt}dt - \frac{x}{R_{Ct}}$$

$$+\frac{x\left(\sqrt{\frac{V(r_t-\hat{r}_t)}{\Delta t}}\right)^2}{2S(\phi)R_{Ct}}\int_0^{w-\phi} t^2 e^{-rt}S(\phi+t)dt + \frac{x\delta}{R_{Ct}}$$

Resolviendo para r se puede encontrar la tasa de interés con la cual debe ser calculada la reserva para la renta vitalicia.

$$R_{Nt} = x\int_0^{w-\phi}\frac{S(\phi+t)}{S(\phi)}e^{-\left(f^{-1}(\eta)\right)t}dt$$

Aplicación

Se considera una población con la siguiente función de sobrevivencia: $S(\phi) = 1 - \frac{x}{100}$

Una persona de 62 años (ϕ = 62 años) ha acumulado una reserva de $89'973.774 ($R_{Ct} = 89'973.774$). El cálculo actuarial a una tasa de interés real del 4% ($r = 4\%$) arroja un valor de la mesada pensional de $615.000 ($x = 615.000$). La tasa de interés real actual es de 5% ($r_t = 5\%$) y su cambio es explicado por la siguiente EDE: $dr_t = [-0.035 -$

Aplicación

$$\mu_t = -\frac{615.000}{0.38 * 89'973.774}[-0.035 - 0.01 * 0.04] * 33.2304 - \frac{615.000}{0.38 * 89'973.774}[-0.2304 - (-0.1496)]$$

$$+\frac{615.000 * (0.1)^2}{2 * 0.38 * 89'973.774} * 492.4780 + \frac{615.000 * 0.03}{89'973.774}$$

$$\mu_t = 2{,}5269\%$$

Este resultado evidencia la invalidez del supuesto que plantea que la tasa a la cual se calculan las reservas para cubrir el pago de las rentas vitalicias debe ser igual a la tasa de retorno esperada de los portafolios en los cuales están invertidas.

Institución Universitaria

Muchas gracias!!